PRÄPOSTERIORIANALYSE BEI TESTVERFAHREN

Gerhard Marinell
Institut für Statistik, Leopold-Franzens-Universität
Innrain 52, A–6020 Innsbruck

Gilg U.H. Seeber
Department of Statistics, University of Florida
Fourth Floor Little Hall, Gainesville, FL 32611, USA

Zusammenfassung. Die Wahl eines optimalen Stichprobenumfanges wird als Entscheidungsproblem im Bayes'schen Kontext dargestellt. Wir betrachten insbesondere einseitige Tests mit Schadenfunktionen, deren Integrale die Gestalt von *partiellen Momenten* annehmen. Die Situation im Gaußmodell wird genauer analysiert und ein Beispiel mit konstanter Schadenfunktion, also ein „klassisches" Testproblem, präsentiert. Bemerkungen zur numerischen Bestimmung der Verteilungsfunktion der bivariaten Normalverteilung beenden den Artikel.

Überarbeitete Fassung eines Vortrages, gehalten am 22.5.1991 im Rahmen der „Pfingsttagung" der Deutschen und der Österreichischen Statistischen Gesellschaft in Innsbruck.

1. Präposteriorianalyse

Aus Bayes'scher Sicht stellt sich die Wahl des optimalen Stichprobenumfangs zur Lösung eines Entscheidungsproblemes unter Risiko auf natürliche Art selbst als Entscheidungsproblem unter Risiko dar. Es sei das zu analysierende Problem charakterisiert durch den Aktionsraum $\mathfrak{A}$, den Zustandsraum Θ, die a priori Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Dichte $\pi(\vartheta)$ und die Schadenfunktion $s(a, \vartheta)$; siehe etwa Marinell (1987) für eine ausführliche Erörterung. Wir wollen voraussetzen, daß die Schäden Opportunitätskosten darstellen, d.h. $s(a, \vartheta)$ ist genau dann 0, wenn a die korrekte Entscheidung bei Zutreffen des Umweltzustandes ϑ ist. In diesem Kontext empfiehlt die Bayes'sche Entscheidungsregel jene Handlungsalternative a_{opt} zu wählen, die den Schadenerwartungswert

$$\mathrm{SE}_{\pi(\vartheta)}(a) = \mathrm{E}[s(a, \vartheta)] = \int_\Theta s(a, \vartheta) \cdot \pi(\vartheta)\, d\vartheta$$

minimiert. Wir betrachten die Situation, in der $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ ein skalarer, reeller Parameter der Verteilungsfunktion $F(\cdot|\vartheta)$ der unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ist und bestimmt werden soll, wieviele X_i tatsächlich zu beobachten/erheben sind. Der Aktionsraum des „vorgelagerten" Entscheidungsproblems enthält also gerade die nichtnegativen ganzen Zahlen.

Für das folgende wollen wir voraussetzen, daß eine eindimensionale, suffiziente Statistik $X = X(X_1, \ldots, X_n)$ für ϑ existiere, die wir der Einfachheit halber als stetig annehmen wollen. $\mathfrak{X}$ sei deren Trägermenge.

Nehmen wir einmal an, die Daten $x = X(x_1, \ldots, x_n)$ stünden schon zur Verfügung. Die darin und in der a priori Verteilung enthaltenen Informationen lassen sich über die Bayes'sche Formel zur Posterioriverteilung „verschmelzen". Bezeichne $f(x|\vartheta)$ die Dichte der suffizienten Statistik X, dann ist

$$f(x) = \int_\Theta f(x|\vartheta) \cdot \pi(\vartheta)\, d\vartheta \tag{1}$$

die Dichte der *Prädiktivverteilung* und

$$\pi(\vartheta|x) = \frac{f(x|\vartheta)\cdot\pi(\vartheta)}{f(x)}$$

jene der a posteriori Verteilung. Zur Bestimmung der nunmehr von der Beobachtung x abhängigen optimalen Aktion $a_{opt}(x)$ ist der Schadenerwartungswert $\mathrm{SE}_{\pi(\vartheta|x)}(a)$ bezüglich der a posteriori Verteilung zu berechnen und zu minimieren.

(1) läßt sich zur Berechnung des Schadenerwartungswertes $\mathrm{SE}(n)$ für die Ziehung einer Stichprobe der Länge n heranziehen. Der dazu relevante Teil des Zustandsraumes ist das kartesische Produkt $\mathfrak{X}\times\Theta$ mit der durch $f(x|\vartheta)\cdot\pi(\vartheta) = f(x,\vartheta)$ bestimmten Verteilung. Damit ist

$$\begin{aligned}\mathrm{SE}(n) &= \int_\Theta \left[\int_{\mathfrak{X}} S(n, a_{opt}(x), \vartheta)\cdot f(x|\vartheta)\,dx\right]\cdot\pi(\vartheta)\,d\vartheta \\ &= \int_{\mathfrak{X}} \left[\int_\Theta S(n, a_{opt}(x), \vartheta)\cdot\pi(\vartheta|x)\,d\vartheta\right]\cdot f(x)\,dx.\end{aligned} \tag{2}$$

Die Schadenfunktion S sei der Gestalt

$$S(n,a,\vartheta) = s(a,\vartheta) + c(n),$$

wobei $c(n)$ die Kosten für eine Stichprobe vom Umfang n sind. Damit ist in kompakter Schreibweise

$$\mathrm{SE}(n) = \mathrm{E}\left[\mathrm{SE}_{\pi(\vartheta|x)}(a_{opt}(x))\right] + c(n). \tag{3}$$

Die Bayes'sche Entscheidungsregel liefert — zumindest im Prinzip — das optimale n_{opt}.

Die Differenz aus Schadenerwartungswert der anhand der a priori Verteilung bestimmten optimalen Aktion a_{opt} und dem mittleren Schadenerwartungswert für die unter Berücksichtigung der Stichprobeninformation berechneten optimalen Aktionen $a_{opt}(x)$,

$$\mathrm{EWSI}(n) = \mathrm{SE}_{\pi(\vartheta)}(a_{opt}) - \mathrm{E}\left[\mathrm{SE}_{\pi(\vartheta|x)}(a_{opt}(x))\right], \tag{4}$$

heißt *Erwarteter Wert der Stichprobeninformation.* Subtrahiert man davon noch die Kosten für die Erhebung der Stichprobe, erhält man den *Erwarteten Nettowert* *der Stichprobeninformation*,

$$\mathrm{ENSI}(n) = \mathrm{EWSI}(n) - c(n).$$

$\mathrm{ENSI}(n)$ ist nach oben durch den *Erwarteten Wert der Perfekten Information* EWPI beschränkt: Weil s Opportunitätskosten darstellen, ist der Schaden für die optimale Aktion bei Kenntnis des „wahren" Umweltzustands gleich 0, damit ist

$$\begin{aligned}\mathrm{EWPI} &= \mathrm{SE}_{\pi(\vartheta)}(a_{opt}) - \int_{\Theta} \min_{a \in \mathfrak{A}} s(a, \vartheta) \cdot \pi(\vartheta)\, d\vartheta \\ &= \mathrm{SE}_{\pi(\vartheta)}(a_{opt})\end{aligned}$$

und es gilt

$$\mathrm{ENSI}(n) = \mathrm{EWPI} - \mathrm{SE}(n). \tag{5}$$

Damit ist auch sichergestellt, daß unter recht allgemeinen Bedingungen (2) ein Minimum bzw. (5) ein Maximum besitzt.

Für später sei noch bemerkt, daß

$$\mathrm{EWPI} = \int_{\mathfrak{X}} \mathrm{SE}_{\pi(\vartheta|x)}(a_{opt}) \cdot f(x)\, dx.$$

Wegen (4) gilt damit

$$\mathrm{EWSI}(n) = \mathrm{E}\left[\mathrm{SE}_{\pi(\vartheta|x)}(a_{opt}) - \mathrm{SE}_{\pi(\vartheta|x)}(a_{opt}(x))\right]. \tag{6}$$

2. Einseitige Tests

Wir betrachen nun einseitige Tests für Hypothesen der Gestalt H_0: $\vartheta \leq \vartheta_0$ und H_1: $\vartheta > \vartheta_0$ für ein $\vartheta_0 \in \Theta$. Der Aktionsraum $\mathfrak{A}$ enthält damit nur die beiden Elemente a_0, a_1 mit der Interpretation

a_0 ... Nullhypothese H_0 annehmen,

a_1 ... Alternativhypothese H_1 annehmen.

Der Erwartete Wert der Stichprobeninformation ist wegen (6) nun

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{EWSI}(n) = \begin{cases} \mathrm{E}\left[\mathrm{SE}_{\pi(\vartheta|x)}(a_0) - \mathrm{SE}_{\pi(\vartheta|x)}(a_1)\right]^+ & \text{falls } a_{opt} = a_0, \\ \mathrm{E}\left[\mathrm{SE}_{\pi(\vartheta|x)}(a_1) - \mathrm{SE}_{\pi(\vartheta|x)}(a_0)\right]^+ & \text{falls } a_{opt} = a_1, \end{cases}$$

wobei wir die Schreibweise

$$[w]^+ = \max\{0, w\}$$

verwenden. Formel (7) läßt sich einfach interpretieren: Eine Stichprobenrealisierung x, die keine Änderung in der Wahl der optimalen Aktion bewirkt, kann auch keinen Beitrag zur Verminderung des Schadenerwartungswertes liefern.

Etwas spezifischer betrachten wir Schadenfunktionen der Form

$$s(a, \vartheta) = \begin{cases} s_2 \cdot (\vartheta - \vartheta_0)^k & \text{falls } a = a_0 \text{ und } \vartheta > \vartheta_0, \\ s_1 \cdot (\vartheta_0 - \vartheta)^k & \text{falls } a = a_1 \text{ und } \vartheta \leq \vartheta_0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei k eine nichtnegative ganze Zahl ist. Die Schadenerwartungswerte bezüglich der a priori Verteilung sind

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{SE}(a) = \begin{cases} s_2 \cdot \int_{\vartheta_0}^{\infty} (\vartheta - \vartheta_0)^k \cdot f(\vartheta)\, d\vartheta & \text{falls } a = a_0, \\ s_1 \cdot \int_{-\infty}^{\vartheta_0} (\vartheta - \vartheta_0)^k \cdot f(\vartheta)\, d\vartheta & \text{falls } a = a_1, \end{cases}$$

oder mit *partiellen Erwartungswerten* ausgedrückt:

$$\mathrm{SE}(a) = \begin{cases} s_2 \cdot \mathrm{E}_{\vartheta_0}^{\infty}\left[(\vartheta_0 - \vartheta)^k\right] & \text{falls } a = a_0, \\ s_1 \cdot \mathrm{E}_{-\infty}^{\vartheta_0}\left[(\vartheta - \vartheta_0)^k\right] & \text{falls } a = a_1. \end{cases}$$

Sei Y eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion $f(y)$. Ist deren momenterzeugende Funktion (siehe z.B. Grimmett und Stirzaker (1982; p. 160))

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \mathrm{E}\left[\exp(tY)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{y_0} \exp(ty) f(y)\, dy + \int_{y_0}^{\infty} \exp(ty) f(y)\, dy \\ &= M_Y^{(1)}(t; y_0) + M_Y^{(2)}(t; y_0) \end{aligned}$$

in einer offenen Umgebung von 0 endlich, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} M_Y^{(1)}(0; y_0) &= \mathrm{E}_{-\infty}^{y_0}\left[Y^k\right], \\ \frac{d^k}{dt^k} M_Y^{(2)}(0; y_0) &= \mathrm{E}_{y_0}^{\infty}\left[Y^k\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Bedenkt man, daß

$$\begin{aligned} M^{(1)}_{\vartheta_0-\vartheta}(t, \vartheta_0) &= \exp(\vartheta_0 t) \cdot M^{(1)}_{\vartheta}(-t; \vartheta_0), \\ M^{(2)}_{\vartheta-\vartheta_0}(t, \vartheta_0) &= \exp(-\vartheta_0 t) \cdot M^{(2)}_{\vartheta}(t; \vartheta_0), \end{aligned}$$

dann läßt sich (8) umformulieren zu

$$\mathrm{SE}(a) = \begin{cases} s_2 \cdot \exp(-\vartheta_0 t) \cdot \dfrac{d^k}{dt^k} M^{(2)}_{\vartheta}(t; \vartheta_0) & \text{falls } a = a_0, \\ s_1 \cdot \exp(\vartheta_0 t) \cdot \dfrac{d^k}{dt^k} M^{(1)}_{\vartheta}(-t; \vartheta_0) & \text{falls } a = a_1. \end{cases}$$

Dies erlaubt in manchen Fällen, die in (8) auftretenden Integrale auf einfachere Funktionen zurückzuführen. So gilt z.B. für eine normalverteilte Zufallsvariable Y mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M^{(1)}_{y_0-Y}(0; y_0) &= \sigma^2 \cdot f_N(y_0|\mu, \sigma^2) + (y_0 - \mu) \cdot F_N(y_0|\mu, \sigma^2), \\ \frac{d^2}{dt^2} M^{(1)}_{y_0-Y}(0; y_0) &= (y_0 - \mu) \cdot \sigma^2 \cdot f_N(y_0|\mu, \sigma^2) + \left[(y_0 - \mu)^2 + \sigma^2\right] \cdot F_N(y_0|\mu, \sigma^2). \end{aligned}$$

3. Präposterioranalyse der Testsituation im Gaussmodell

μ sei nun eine a priori normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ' und Varianz ${\sigma'}^2$. Es gelte die Hypothesen H_0: $\mu \le \mu_0$ und H_1: $\mu > \mu_0$ zu testen. Die potentiellen Elemente der Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ seien bei gegebenem μ unbhängige, normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und bekannter Varianz σ^2. Die gemeinsame Verteilung des (für μ suffizienten) arithmetischen Mittelwertes $\bar{X} = 1/n \cdot (X_1 + \cdots + X_n)$ und μ ist dann eine bivariate Normalverteilung mit Erwartungswert

$$\boldsymbol{m} = \mathrm{E}\left[(\bar{X}\ \mu)^t\right] = (\mu'\ \mu')^t$$

und Varianz-/Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{V} = \mathrm{Var}\left[(\bar{X}\ \mu)^t\right] = \begin{pmatrix} \sigma'^2 + \sigma^2/n & \sigma'^2 \\ \sigma'^2 & \sigma'^2 \end{pmatrix}.$$

Bezeichne $n' = \sigma^2/\sigma'^2$ den hypothetischen Stichprobenumfang, dann gilt für den Korrelationskoeffizienten ϱ von $\bar{X}$ und μ

$$\varrho = \frac{\sigma'}{\sqrt{\sigma'^2 + \sigma^2/n}} = \sqrt{\frac{n}{n+n'}}$$

und, falls $n' \neq 0$ und $\boldsymbol{V}$ damit invertierbar ist,

$$\boldsymbol{V}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \begin{pmatrix} n & -n \\ -n & n+n' \end{pmatrix}.$$

Unter der Voraussetzung $s_1 = s_2 = 1$ zeigt Berger (1985; p. 440), daß

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} \mathrm{EWSI}(n) = -\frac{\exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sigma'^2} + \frac{n'^2}{n}\right) \cdot (\mu_0 - \mu')^2\right] \cdot v_{k+1} \cdot (\sigma\sigma')^{k+1}}{2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot (\sigma^2 + n\sigma'^2)^{(k+2)/2} \cdot \sqrt{n}},$$

wobei v_{k+1} das $(k+1)$-te absolute Moment einer Standardnormalverteilung bezeichnet. Daraus läßt sich der optimale Stichprobenumfang numerisch leicht bestimmen. Raiffa und Schlaifer (1961; p. 114 ff) untersuchen lineare Schadenfunktionen. Sie geben eine approximative Formel zur Berechnung von n_{opt} an und liefern eine „qualitative“ Analyse der Funktion ENSI(n).

Wir betrachten etwas genauer den Spezialfall einer „konstanten“ Schadenfunktion

$$s(a, \mu) = \begin{cases} s_2 & \text{falls } a = a_0 \text{ und } \mu > \mu_0, \\ s_1 & \text{falls } a = a_1 \text{ und } \mu \leq \mu_0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies ist insbesondere deshalb von besonderem Interesse, weil sich das klassische Testproblem in diesen Rahmen einbetten läßt, siehe z.B. Marinell (1987). Nehmen wir an, die aufgrund der a priori Verteilung ermittelte optimale Aktion wäre

a_0. Wegen (7) ist

$$(10)\,\mathrm{EWSI}(n) = \mathrm{E}\left[s_2 \cdot \left(1 - F_N\left(\mu_0 \left|\mu''(\bar{x}), \sigma''^2\right.\right)\right) - s_1 \cdot F_N\left(\mu_0 \left|\mu''(\bar{x}), \sigma''^2\right.\right)\right]^+ ,$$

wobei

$$\mu''(\bar{x}) = \frac{n' \cdot \mu' + n \cdot \bar{x}}{n + n'}$$

der von $\bar{x}$ und n abhängige Erwartungswert und

$$\sigma''^2 = \frac{\sigma^2}{n + n'}$$

die nur von n abhängige Varianz der a posteriori Verteilung, d.i. die bedingte Verteilung von μ gegeben x, ist. Der Ausdruck in der eckigen Klammer von (10) ist genau dann positiv, wenn

$$F_N\left(\mu_0 \left|\mu''(\bar{x}), \sigma''^2\right.\right) < \frac{s_2}{s_1 + s_2}.$$

Dies trifft gerade dann zu, wenn $\bar{x} > \bar{x}_0$ ist mit

$$\bar{x}_0 = \mu_0 + \frac{n'}{n} \cdot (\mu_0 - \mu') - \frac{\sqrt{n + n'}}{n} \cdot z_\alpha \cdot \sigma, \tag{11}$$

wobei $\alpha = s_2/(s_1 + s_2)$ und z_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung ist. $\bar{x}_0$ begrenzt jenen Bereich von Stichprobenrealisierungen, der die optimale Aktion ändert, m.a.W.

$$\{\bar{x}|a_{opt}(\bar{x}) = a_0 = a_{opt}\} = \{\bar{x}|\bar{x} \le \bar{x}_0\} \quad \text{und} \quad \{\bar{x}|a_{opt}(\bar{x}) = a_1\} = \{\bar{x}|\bar{x} > \bar{x}_0\}.$$

Aus (11) ist zu erkennen, daß der Schnittpunkt $\bar{x}_0$ mit zunehmender Stichprobengröße gegen μ_0 tendiert. Der Erwartete Wert der Stichprobeninformation (10) läßt sich nun als Integral über die bivariate Normalverteilung berechnen:

$$(12)\quad \mathrm{EWSI}(n) =$$
$$(s_1 + s_2) \cdot \int_{\bar{x}_0}^{\infty} \int_{\mu_0}^{\infty} f_N((\bar{x}, \mu)|\boldsymbol{m}, \boldsymbol{V})\, d\mu\, d\bar{x} - s_2 \int_{\bar{x}_0}^{\infty} f_N(\bar{x}|\mu', \sigma'^2 + \sigma^2/n)\, d\bar{x}.$$

Steigen die Kosten $c(n)$ für die Erhebung der Stichprobe streng monoton mit dem Stichprobenumfang n, erhält man wegen $\mathrm{ENSI}(n) \le \mathrm{EWPI}$ mit $\max_n\{c(n) \le$

EWPI} eine obere Schranke für den damit auch existierenden optimalen Stichprobenumfang.

Zur Illustration betrachten wir ein einfaches numerisches Beispiel: Es sei μ a priori normalverteilt mit Erwartungswert $\mu' = 100$ und Varianz ${\sigma'}^2 = 25$. Die Varianz der normalverteilten potentiellen Stichprobenelemente sei mit $\sigma^2 = 100$ bekannt, deren (bedingter) Erwartungswert sei μ. Der hypothetische Stichprobenumfang ist daher $n' = 4$. Die zur Entscheidung anstehenden Hypothesen seien H_0: $\mu \leq 98$ und H_1: $\mu > 98$; zu berücksichtigen sei die „konstante“ Schadenfunktion mit $s_1 = 19$ und $s_2 = 1$. Dem entspricht ein Schadenverhältnis von $\alpha = 0.05$. Die aufgrund der a priori Informationen zu errechnenden Schadenerwartungswerte sind $\text{SE}(a_0) = 0.66$ und $\text{SE}(a_1) = 6.55$, a_0 ist also die anhand der a priori Verteilung ermittelte optimale Entscheidung und es gilt $\text{EWPI} = \text{SE}(a_{opt}) = 0.66$. Nehmen wir des weiteren an, die Kostenfunktion wäre der einfachen Gestalt $c(n) = 0.01 \cdot n$, dann ist $[\text{EWPI}/0.01] = 66$ eine obere Schranke für n_{opt}. Wie Abbildung 1 zeigt, besitzt der Erwartete Nettowert der Stichprobe bei $n = 15$ ein Maximum und es ist $\text{ENSI}(15) = 0.12$.

```
-------------------------
Abbildung 1 ungefähr hier
-------------------------
```

Die Berechnung des in (12) auftretenden Doppelintegrals ist ein numerisch diffiziles Problem, insbesondere wenn der Korrelationskoeffizient nahe bei 1 zu liegen kommt, was aber typischerweise dann der Fall ist, wenn der hypothetische Stichprobenumfang klein und die a priori Verteilung damit wenig informativ ist.

Die Verteilungsfunktion der bivariaten Normalverteilung mit Erwartungswert $\boldsymbol{m}$ und Varianz-/Kovarianzmatrix $\boldsymbol{V}$ läßt sich als einfaches Integral darstellen (vgl. Tong (1990; p. 15):

$$(13)\quad F_N(x_1, x_2|\boldsymbol{m}, \boldsymbol{V}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F_Z\left(\frac{\sqrt{2\cdot|\varrho|}\cdot z + a_1}{\sqrt{1-|\varrho|}}\right) \cdot F_Z\left(\frac{\delta_\varrho \cdot \sqrt{2\cdot|\varrho|}\cdot z + a_2}{\sqrt{1-|\varrho|}}\right) \cdot \exp(-z^2)\, dz,$$

wobei

$$a_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \qquad \text{für } i = 1, 2,$$

$$\delta_\varrho = \begin{cases} 1 & \text{für } \varrho \geq 0, \\ -1 & \text{für } \varrho < 0 \end{cases}$$

und F_Z die Verteilungsfunktion der univariaten Standardnormalverteilung bezeichnet. Gauß-Hermite Quadratur (siehe etwa THISTED (1988, Kapitel 5.3)) bietet sich als einfach zu programmierendes numerisches Verfahren zur Lösung von Integralen der Gestalt (13) an, das oft schon mit wenigen Stützstellen ausreichend genaue Lösungen liefert. Nach unserer Erfahrung trifft dies im Falle von (13) allerdings nur für genügend kleine $|\varrho|$ zu – tatsächlich waren zur Berechnung der in TONG (1990) angeführten Tabellen 120 Stützstellen notwendig, um einen Fehler kleiner als 10^{-5} zu garantieren. Weniger aufwendigen Algorithmen, wie etwa der in COX UND WERMUTH (1991) beschriebenen Approximation, mangelt es im allgemeinen an der erforderlichen Genauigkeit.

Eine attraktive Alternative – sowohl was Programmieraufwand als auch Genauigkeit betrifft – findet man in DREZNER UND WESOLOWSKY (1990). Das dort angegebene Verfahren berechnet

$$L(x_1, x_2|\varrho) = \int_{x_1}^{\infty} \int_{x_2}^{\infty} f_N(u_1, u_2|\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}, \sigma_1 = \sigma_2 = 1, \varrho)\, du_1 du_2$$

im wesentlichen über die Darstellung

(14)

$$L(x_1, x_2|\varrho) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\sqrt{1-\varrho^2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \exp\left[-\frac{x_1^2 - 2\sqrt{1-u^2}x_1 x_2 + x_2^2}{2u^2} \right] du + F_Z(-\max\{x_1, x_2\}).$$

Gauß-Legendre Quadratur und garantiert schon bei 5 Stützstellen einen maximalen Fehler $< 3 \cdot 10^{-6}$, was für unsere Zwecke ausreichend erscheint.

Es sei noch bemerkt, daß das Doppelintegral in (12) der Gestalt

$$L\left(\frac{\bar{x}_0-\mu'}{\sqrt{\sigma'^2+\sigma^2/n)}}, \frac{\mu_0-\mu'}{\sigma'}\middle|\sqrt{\frac{n}{n+n'}}\right)$$

ist. Allgemein läßt sich die Verteilungsfunktion nach Transformation der Integrationsgrenzen über

$$F_N(x_1, x_2|\boldsymbol{m}=\mathbf{0}, \sigma_1=\sigma_2=1, \varrho) = L(x_1, x_2|\varrho) + F_Z(x_1) + F_Z(x_2) - 1$$

berechnen.

4. Literatur

Berger, J.O. (1985): *Statistical Decision Theory. Second Edition.* New York: Springer.

Cox, D.R. und Wermuth, N. (1991): Approximations for Bivariate and Trivariate Normal Integrals. *Int. Statist. Rev.* **59**, 263–269.

Drezner, Z. und Wesolowsky, G.O. (1990): On the computation of the bivariate normal integral. *J. Statist. Comput. Simul.*, **35**, 101–107.

Grimmett, G.R. und Stirzaker, D.R. (1982): *Probability and Random Processes.* Oxford: Clarendon Press.

Marinell, G. (1987): *Statistik. Zweite Auflage.* München: Oldenbourg.

Marinell, G. und Seeber, G. (1990): *Angewandte Statistik. Zweite Auflage.* München: Oldenbourg.

Raiffa, H. und Schlaifer, R. (1961): *Applied Statistical Decision Theory.* Cambridge, MA: M.I.T. Press.

Thisted, R.A. (1988): *Elements of Statistical Computing. Numerical Computation.* New York: Chapman and Hall.

Tong, Y.L. (1990): *The Multivariate Normal Distribution.* New York: Springer.

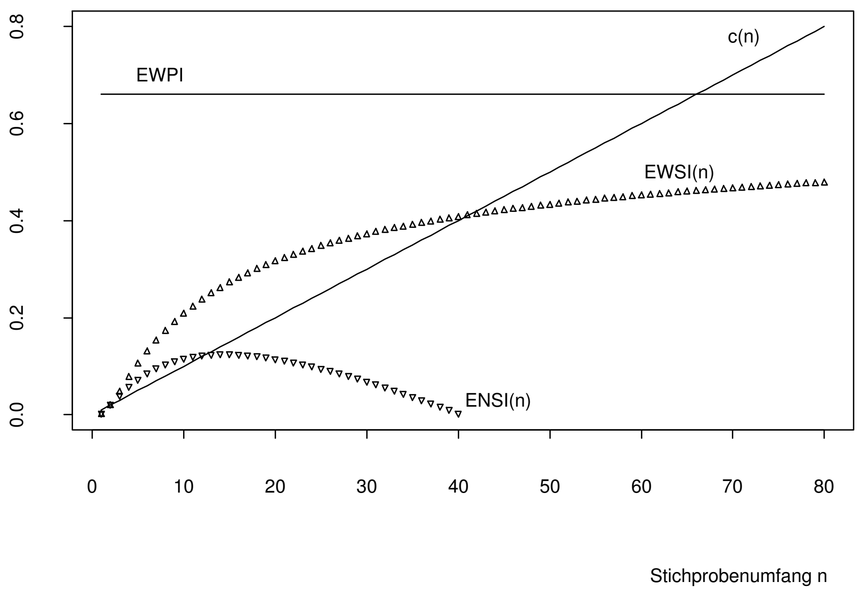

ABBILDUNG 1. Erwarteter Wert und Erwarteter Nettowert der Stichprobeninformation, sowie Kostenfunktion für die Stichprobenerhebung in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang für das Beispiel im Text.